

4.4 Taylorentwicklung

1. Definitionen

f sei eine reellwertige $m + 1$ -mal stetig differenzierbare Funktion der n Variablen x_1 bis x_n auf einem Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Verbindungsgerade der Punkte \vec{a} und $\vec{a} + \vec{h}$ liege ganz in M . Dann gilt die Taylorformel

Taylorformel

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = T_m f(\vec{h}) + R_m f(\vec{h})$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} ((\nabla \cdot \vec{h})^k f)(\vec{a}) + \frac{1}{(m+1)!} ((\nabla \cdot \vec{h})^{m+1} f)(\vec{a} + \vartheta \vec{h}), \quad \vartheta \in]0, 1[.$$

Wie in Kapitel 2.10 heißt $T_m f$ (m -tes) Taylorpolynom (in den n Variablen h_1 bis h_n) und $R_m f$ m -tes Restglied.

Taylor-
polynom
Restglied

Das Taylorpolynom enthält die Werte von f und den partiellen Ableitungen bis zur m -ten Ordnung am Entwicklungspunkt \vec{a} , das Restglied die Werte der $m + 1$ -sten partiellen Ableitungen an einer Zwischenstelle $\vec{a} + \vartheta \vec{h}$, $\vartheta \in]0, 1[$.

Dabei ist ∇ der Nabla-Operator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ und \vec{h} der Vektor $(h_1, h_2, \dots, h_n)^\top$. $\nabla \cdot \vec{h}$ ist das (Matrix-)Produkt dieser beiden Vektoren, also

Nabla-
Operator
 ∇

$$(\nabla \cdot \vec{h})^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^k.$$

Beim Ausmultiplizieren dieses Ausdrucks kommt es wegen des Satzes von Schwarz auf die Reihenfolge der Ableitungsoperatoren nicht an. In konkreten Fällen verwendet man als Variablennamen statt x_1 bis x_n oft x, y usw.

Andere übliche Schreibweise der Taylorformel: wenn man $\vec{x} = \vec{a} + \vec{h}$ setzt, ist $\vec{h} = \vec{x} - \vec{a}$ und man hat

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} ((\nabla \cdot (\vec{x} - \vec{a}))^k f)(\vec{a}) + \frac{1}{(m+1)!} ((\nabla \cdot (\vec{x} - \vec{a}))^{m+1} f)(\vec{a} + \vartheta(\vec{x} - \vec{a}))$$

Bei dieser Schreibweise muß man unbedingt beachten, daß der Nablaoperator in der Klammer nur auf f und nicht auf den Vektor \vec{x} wirkt! Für den Entwicklungspunkt $\vec{x} = \vec{0}$ lautet die Formel

Achtung!

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} ((\nabla \cdot \vec{x})^k f)(\vec{0}) + \frac{1}{(m+1)!} ((\nabla \cdot \vec{x})^{m+1} f)(\vartheta \vec{x})$$

2. Berechnung**Berechnung im Fall $n = 2$** Fall $n = 2$

Hier verwenden wir die Variablen x und y . Es ist $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ und $\vec{h} = (h_1, h_2)^\top$.

Damit hat das Produkt $\nabla \cdot \vec{h}$ die Form $\nabla \cdot \vec{h} = \frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial}{\partial y} h_2$ und die Potenz $(\nabla \cdot \vec{h})^k$ läßt sich mit Hilfe der binomischen Formel auswerten:

$$(\nabla \cdot \vec{h})^k f(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f(x, y) h_1^j h_2^{k-j}.$$

Die Taylorformel hat also die Gestalt

$$\begin{aligned} f(a + h_1, b + h_2) &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f \right) (a, b) h_1^j h_2^{k-j} \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} \left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^j \partial y^{m+1-j}} f \right) (a + \vartheta h_1, b + \vartheta h_2) h_1^j h_2^{m+1-j} \end{aligned}$$

ϑ liegt wie immer zwischen Null und Eins.

Daraus ergibt sich folgendes praktische Verfahren, daß beispielhaft für den Fall $m = 2$ (d.h. Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung, das Restglied enthält die dritten Ableitungen) aufgeschrieben ist:

- ① Man schreibt alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $m + 1$ in einem Schema auf, das wie das Pascalsche Dreieck aufgebaut ist.

1. Dreieck

$$\begin{array}{cccc} f & & & \leftarrow 0. \text{ Zeile} \\ f_x & f_y & & \leftarrow 1. \text{ Zeile} \\ f_{xx} & f_{xy} & f_{yy} & \leftarrow m\text{-te Zeile, hier 2. Zeile} \\ f_{xxx} & f_{xxy} & f_{xyy} & f_{yyy} \leftarrow m+1\text{-ste, hier 3. Zeile} \end{array}$$

- ②
- In der ersten bis zur m -ten Zeile werden die Werte der Funktion und Ableitungen an der Entwicklungsstelle (a, b) notiert
 - in der letzten, also der $m + 1$ -sten Zeile die Werte an einer Zwischenstelle (\tilde{a}, \tilde{b}) mit $\tilde{a} = a + \vartheta h_1$ und $\tilde{b} = b + \vartheta h_2$:

2. Dreieck

$$\begin{array}{cccc} f(a, b) & & & \leftarrow 0. \text{ Zeile} \\ f_x(a, b) & f_y(a, b) & & \leftarrow 1. \text{ Zeile} \\ f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) & \leftarrow m\text{-te Zeile} \\ f_{xxx}(\tilde{a}, \tilde{b}) & f_{xxy}(\tilde{a}, \tilde{b}) & f_{xyy}(\tilde{a}, \tilde{b}) & f_{yyy}(\tilde{a}, \tilde{b}) \leftarrow m+1\text{-ste Zeile} \end{array}$$

Darunter (oder daneben, wenn der Platz reicht), schreibt man in einem Pascalschen Dreieck die Terme auf, die bei der Binomialentwicklung von $(h_1 + h_2)^k$ entstehen und daneben die Kehrwerte von $k!$

1	1	← 0. Zeile			
h_1	h_2	← 1. Zeile			
h_1^2	$2h_1h_2$	h_2^2	$\frac{1}{m!} = \frac{1}{2}$	← m -te Zeile	
h_1^3	$3h_1^2h_2$	$3h_1h_2^2$	h_2^3	$\frac{1}{(m+1)!} = \frac{1}{6}$	← $m + 1$ -ste Zeile

3. Dreieck

- ③ Jeder Term des zweiten Dreiecks (das die Werte an der Entwicklungs- bzw. Zwischenstelle enthält) wird mit dem entsprechenden Term des dritten Dreiecks (mit den Teilen von $(h_1 + h_2)^k$) und mit dem in der entsprechenden Zeile stehenden Kehrwert von $k!$ multipliziert. Alle diese Werte werden addiert.

In der Entwicklung bis zur zweiten Ordnung bedeutet das

$$\begin{aligned}
 & f(a + h_1, b + h_2) \\
 \text{0. Zeile} & = f(a, b) \cdot 1 \cdot 1 \\
 \text{1. Zeile} & + f_x(a, b) \cdot h_1 \cdot 1 + f_y(a, b) \cdot h_2 \cdot 1 \\
 \text{2. Zeile} & + f_{xx}(a, b) \cdot h_1^2 \cdot \frac{1}{2} + f_{xy}(a, b) \cdot 2h_1h_2 \cdot \frac{1}{2} + f_{yy} \cdot h_2^2 \cdot \frac{1}{2} \\
 \text{3. Zeile} & + f_{xxx}(a + \vartheta h_1, b + \vartheta h_2) \cdot h_1^3 \cdot \frac{1}{6} + f_{xxy}(a + \vartheta h_1, b + \vartheta h_2) \cdot 3h_1^2h_2 \cdot \frac{1}{6} \\
 & + f_{xyy}(a + \vartheta h_1, b + \vartheta h_2) \cdot 3h_1h_2^2 \cdot \frac{1}{6} + f_{yyy}(a + \vartheta h_1, b + \vartheta h_2) \cdot h_2^3 \cdot \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Beispiel 1: Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $f(x, y) = \frac{x}{y}$ am Punkt $(a, b) = (2, 1)$.

- ① Alle Ableitungen bis zur dritten Ordnung:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \frac{x}{y} \\
 & & \frac{1}{y} \quad \frac{-x}{y^2} \\
 & 0 & \frac{-1}{y^2} \quad \frac{2x}{y^3} \\
 0 & 0 & \frac{2}{y^3} \quad \frac{-6x}{y^4}
 \end{array}$$

② In den Zeilen 0 bis 2 des linken Dreiecks stehen die Werte für $x = 2$ und $y = 1$. In der dritten (der letzten) Zeile stehen die Werte der dritten Ableitungen an der Stelle $\tilde{a} = 2 + \vartheta h_1$ und $\tilde{b} = 1 + \vartheta h_2$. Daneben stehen die Teile von $(h_1 + h_2)^k$ und die Kehrwerte der Fakultäten.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & 2 & & & & 1 & & & 1 \\
 & & 1 & -2 & & & h_1 & h_2 & & 1 \\
 & 0 & -1 & 4 & & & h_1^2 & 2h_1h_2 & h_2^2 & \frac{1}{2} \\
 0 & 0 & \frac{2}{\tilde{b}^3} & \frac{-6\tilde{a}}{\tilde{b}^4} & h_1^3 & 3h_1^2h_2 & 3h_1h_2^2 & h_2^3 & & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

③ Damit sieht die gesuchte Taylorentwicklung so aus:

$$\begin{aligned}
 \frac{2+h_1}{1+h_2} &= (2 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot h_1 \cdot 1 - 2 \cdot h_2 \cdot 1) + (-1 \cdot 2h_1h_2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot h_2^2 \cdot \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{2}{(1+\vartheta h_2)^3} \cdot 3h_1h_2^2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{-6(2+\vartheta h_1)}{(1+\vartheta h_2)^4} \cdot h_2^3 \cdot \frac{1}{6} \\
 &= 2 + h_1 - 2h_2 - h_1h_2 + 2h_2^2 + R_2(h_1, h_2) \text{ mit} \\
 R_2(h_1, h_2) &= \frac{h_1h_2^2}{(1+\vartheta h_2)^3} - \frac{(2+\vartheta h_1)h_2^3}{(1+\vartheta h_2)^4}
 \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall (drei und mehr Variable)

allgemeiner
Fall

Im allgemeinen geht man bei einer Taylorentwicklung bis zur m -ten Ordnung so vor:

- ① Der Ausdruck $(\nabla \cdot \vec{h})^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^k$ wird für $k = 2$ bis $k = m$ ausmultipliziert. Wenn man auch das Restglied benötigt, muß man auch die $m + 1$ -ste Potenz bilden.
- ② Die nötigen partiellen Ableitungen von f werden gebildet.
- ③ Das Taylorpolynom wird mit Hilfe der Ableitungswerte am Entwicklungspunkt \vec{a} aufgebaut, das Restglied mit Werten an einer Zwischenstelle $\vec{a} + \vartheta \vec{h}$.

Beispiel 2: Zweites Taylorpolynom von $f(x, y, z) = e^{2x+yz}$ im Nullpunkt.

① Benötigt wird $\left(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2 + \frac{\partial}{\partial z}h_3\right)^2$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}h_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}h_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}h_3^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h_1h_2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}h_1h_3 + 2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}h_2h_3$$

② Die ersten partielle Ableitungen sind $f_x = 2e^{2x+yz}$, $f_y = ze^{2x+yz}$ und $f_z = ye^{2x+yz}$.

Es gibt 6 zweite partielle Ableitungen:

$$f_{xx} = 4e^{2x+yz}, \quad f_{yy} = z^2e^{2x+yz}, \quad f_{zz} = y^2e^{2x+yz}$$

$$f_{xy} = 2ze^{2x+yz}, \quad f_{xz} = 2ye^{2x+yz}, \quad f_{yz} = (1 + yz)e^{2x+yz}$$

③ Die Werte der Ableitungen am Entwicklungspunkt $x = y = z = 0$ sind

$$f(0, 0, 0) = 1$$

$$f_x(0, 0, 0) = 2, \quad f_y(0, 0, 0) = f_z(0, 0, 0) = 0$$

$$f_{xx}(0, 0, 0) = 4, \quad f_{yz}(0, 0, 0) = 1$$

$$f_{yy}(0, 0, 0) = f_{zz}(0, 0, 0) = f_{xy}(0, 0, 0) = f_{xz}(0, 0, 0) = 0$$

Damit hat das zweite Taylorpolynom die Form

$$T_2f(h_1, h_2, h_3) = 1 + 2 \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot 4h_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h_2h_3 = 1 + 2h_1 + 2h_1^2 + h_2h_3.$$

Wenn man will, kann man jetzt auch h_1 , h_2 und h_3 durch x , y und z ersetzen:

$$T_2f(x, y, z) = 1 + 2x + 2x^2 + yz.$$

Vektorwertige Funktionen

Vektorwertige Funktionen

Die oben angegebenen Formel dient der Taylorentwicklung reellwertiger Funktionen. Ist \vec{f} eine \mathbb{R}^k -wertige Funktion, so geht man nach der "Grundregel" auf S. 50 vor.

Wichtig: Bei der Bestimmung des Restglieds muß man in jeder Komponente eine eigene Zwischenstelle nehmen.

Das erste Restglied $R_1\vec{f}(h_1, h_2)$ bei der Taylorentwicklung von $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$

an der Stelle $(a, b) = (0, 0)$ ist

$$\frac{1}{2} \left(f_{1xx}(\vartheta_1h_1, \vartheta_1h_2)h_1^2 + 2f_{1xy}(\vartheta_1h_1, \vartheta_1h_2)h_1h_2 + f_{1yy}(\vartheta_1h_1, \vartheta_1h_2)h_2^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(f_{2xx}(\vartheta_2h_1, \vartheta_2h_2)h_1^2 + 2f_{2xy}(\vartheta_2h_1, \vartheta_2h_2)h_1h_2 + f_{2yy}(\vartheta_2h_1, \vartheta_2h_2)h_2^2 \right)$$

mit $\vartheta_1 \in]0, 1[$ und $\vartheta_2 \in]0, 1[$.

Analytische Funktionen

Analytische Funktionen

Analog zu Kapitel 2.12 heißt eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte Funktion f analytisch, wenn man sie um jeden Punkt von G in eine konvergente Potenzreihe in den Variablen x_1 bis x_n entwickeln kann. Eigenschaften:

- Alle Funktionen, die sich aus (eindimensionalen) analytischen Funktionen zusammensetzen, sind in ihrem Definitionsbereich analytisch.
- Analytische Funktionen lassen sich stets in Taylorreihen entwickeln. Die Taylorreihe konvergiert in einer Umgebung des Entwicklungspunkts gegen die Funktion.
- Das Taylorpolynom erhält man als den entsprechenden Abschnitt der Potenzreihe der Funktion.
- Bei der Ermittlung der Potenzreihen darf man Reihen ineinander einsetzen und miteinander multiplizieren.

3. Beispiele

Beispiel 3: Taylorentwicklung von $f(x, y) = \frac{e^x}{1-y}$ bis zur zweiten Ordnung um $(0, 0)$, Angabe des Restglieds.

- ① Da auch das Restglied berechnet wird, müssen alle Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet werden:

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

$$\frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y} \quad \frac{e^x}{1-y}$$

- ② In Funktion, erster und zweiter Ableitung werden die Werte am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ aufgeschrieben, bei der dritten Ableitung die Werte an einer Stelle $(\tilde{a}, \tilde{b}) = (\vartheta x, \vartheta y)$ mit $\vartheta \in]0, 1[$. Daneben stehen die Binomialkoeffizienten und die Kehrwerte der Fakultäten.

$$\frac{e^{\tilde{a}}}{1-\tilde{b}} \quad \frac{e^{\tilde{a}}}{(1-\tilde{b})^2} \quad \frac{2e^{\tilde{a}}}{(1-\tilde{b})^3} \quad \frac{6e^{\tilde{a}}}{(1-\tilde{b})^4} \quad h_1^3 \quad 3h_1^2 h_2 \quad 3h_1 h_2^2 \quad h_2^3 \quad 1/6$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad h_1^2 \quad 2h_1 h_2 \quad h_2^2 \quad 1/2$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad h_1 \quad h_2 \quad 1/1$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1/1$$

③ Damit wird das Taylorpolynom und das Restglied aufgebaut:

$$\begin{aligned}
 f(h_1, h_2) &= 1 + (h_1 + h_2) + \frac{1}{2}(h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2) \quad (\text{Taylorpolynom}) \\
 &+ \frac{1}{6} \left(\frac{e^{\tilde{a}}}{1 - \tilde{b}} h_1^3 + 3 \frac{e^{\tilde{a}}}{(1 - \tilde{b})^2} h_1^2 h_2 + 3 \frac{2e^{\tilde{a}}}{(1 - \tilde{b})^3} h_1 h_2^2 + \frac{6e^{\tilde{a}}}{(1 - \tilde{b})^4} h_2^3 \right) \\
 &\quad (\text{Restglied})
 \end{aligned}$$

Jetzt kann man h_1 und h_2 durch x und y ersetzen:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + y^2 \\
 &+ \frac{e^{\vartheta x}}{6} \left(\frac{1}{1 - \vartheta y} x^3 + \frac{3}{(1 - \vartheta y)^2} x^2 y + \frac{6}{(1 - \vartheta y)^3} x y^2 + \frac{6}{(1 - \vartheta y)^4} y^3 \right) \\
 &\vartheta \in]0, 1[
 \end{aligned}$$

Wird die gesamte Taylorreihe von f gesucht, kann man so vorgehen:

Da f sich aus analytischen Funktionen zusammensetzt und daher auch analytisch ist, ist die Taylorreihe mit der Potenzreihe identisch. Diese erhält man, wenn man die Potenzreihen der Faktoren miteinander multipliziert:

$$\frac{e^x}{1 - y} = e^x \frac{1}{1 - y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \sum_{m=0}^{\infty} y^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n y^m.$$

Das zweite Taylorpolynom kann man aus dieser Darstellung erhalten, wenn man alle Glieder herausucht, in denen $n + m \leq 2$ ist. Damit erhält man natürlich wieder dasselbe Polynom wie oben:

$$T_2 f(x, y) = \underbrace{1}_{n+m=0} + \underbrace{x + y}_{n+m=1} + \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + y^2}_{n+m=2}.$$

Beispiel 4: Entwicklung von $f(x, y) = (x + 2y)^3$ um $(a, b) = (-1, 1)$

① Alle Ableitungen von f bis zur dritten Ordnung:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & (x + 2y)^3 & & \\
 & & & 3(x + 2y)^2 & & 6(x + 2y)^2 \\
 & 6(x + 2y) & & 12(x + 2y) & & 24(x + 2y) \\
 6 & & 12 & & 24 & 48
 \end{array}$$

Alle weiteren Ableitungen sind Null.

- ② Jetzt werden die Werte am Entwicklungspunkt $x = -1, y = 1$ aufgeschrieben. Daneben stehen die Binomialkoeffizienten und die Kehrwerte der Fakultäten.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & 1 & & & & & 1 & & & 1/1 \\
 & & 3 & & 6 & & & & h_1 & & h_2 & & 1/1 \\
 & 6 & 12 & & 24 & & & & h_1^2 & & 2h_1h_2 & & h_2^2 & & 1/2 \\
 6 & 12 & & 24 & & 48 & & & h_1^3 & & 3h_1^2h_2 & & 3h_1h_2^2 & & h_2^3 & & 1/6
 \end{array}$$

- ③ Da alle höheren Ableitungen Null sind, sind auch die entsprechenden Restglieder Null und die Funktion stimmt mit dem Taylorpolynom überein:

$$\begin{aligned}
 f(-1 + h_1, 1 + h_2) &= 1 \\
 &+ 3h_1 + 6h_2 \\
 &+ 3h_1^2 + 12h_1h_2 + 12h_2^2 \\
 &+ h_1^3 + 6h_1^2h_2 + 12h_1h_2^2 + 8h_2^3
 \end{aligned}$$

Ersetzt man h_1 durch $x + 1$ und h_2 durch $y - 1$, so erhält man $f(-1 + h_1, 1 + h_2) = f(x, y) = (x + 2y)^3$

$$\begin{aligned}
 (x + 2y)^3 &= 1 \\
 &+ 3(x + 1) + 6(y - 1) \\
 &+ 3(x + 1)^2 + 12(x + 1)(y - 1) + 12(y - 1)^2 \\
 &+ (x + 1)^3 + 6(x + 1)^2(y - 1) + 12(x + 1)(y - 1)^2 + 8(y - 1)^3
 \end{aligned}$$

Alternative: In $(x + 2y)^3$ ersetzt man x durch $-1 + h_1$ und y durch $1 - h_2$. Dann multipliziert man die dritte Potenz aus und ersetzt h_1 wieder durch $x + 1$ und h_2 durch $y - 1$.

Beispiel 5: Die Taylorreihe von $\sin(x + y)$

Da die Funktion analytisch ist, stimmen Taylor- und Potenzreihe überein. Die Potenzreihe erhält man durch Einsetzen von $x + y$ in die Sinusreihe:

$$\sin(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} (x + y)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \sum_{m=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{m} x^m y^{2n+1-m}.$$

Mit $\binom{2n+1}{m} = \frac{(2n+1)!}{m!(2n+1-m)!}$ erhält man

$$\sin(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{m!(2n+1-m)!} x^m y^{2n+1-m}.$$